

**Ключевые слова:**

поведенческие финансы, принятие решений, моделирование ценовых процессов, ограниченная рациональность, чрезмерная реакция, недостаточная реакция, эффект «узкой рамки»

**Ю. В. Ельцов,**

преподаватель кафедры международных валютно-финансовых отношений НИУ ВШЭ  
(e-mail: [eltsov.yu@gmail.com](mailto:eltsov.yu@gmail.com))

## Рациональность портфельного инвестора: поведенческие особенности формирования ожиданий

*Арсенал методов анализа современного финансиста постоянно пополняется благодаря масштабному взаимодействию классических финансовых теорий с поведенческой наукой. В финансовый анализ вовлекается инструментарий не только смежных наук, но и ранее совершенно не связанных с финансами научных дисциплин, будь то экспериментальная психология, термодинамика или нейробиология.*

Современный финансовый аналитик вынужден находить равновесие в своего рода системе координат, где по одной оси — рациональность субъектов, а по другой — информационная эффективность ценовых процессов. В данном исследовании вопрос информационной эффективности нас интересовал косвенно, и мы ограничимся оговоркой, что наиболее развитые рынки ближе к эффективности, чем развивающиеся. Именно поэтому используемые нами ценовые процессы взяты с американского фондового рынка как более развитого и эффективного, нежели другие. На его примере мы попытаемся показать явный (неустранимый и не связанный с неразвитостью рынка) вклад поведенческих механизмов в процесс формирования массовых ожиданий игроков.

### **ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ФОРМИРОВАНИЯ МАССОВЫХ ОЖИДАНИЙ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ**

Основная задача исследования заключалась во всестороннем изучении субъективных ожиданий участников финансовых рынков с учетом базовых когнитивных эффектов. Для этого на кафедре международных валютно-финансовых отношений НИУ ВШЭ были разработаны сценарии, проведены несколько серий массовых полевых экспериментов и собрана представительная выборка субъективных прогнозов. Также был предложен математический аппарат для анализа и проверки различных поведенческих эффектов в механизмах формирования субъективных ожиданий.

### Описание полевых экспериментов

Первым этапом исследования стал следующий полевой эксперимент. В качестве источника ценового ряда мы взяли динамику американского промышленного индекса Доу — Джонса. В полевых экспериментах использовались временные ряды с 2006 по 2010 г. В настоящей работе описываются результаты наиболее массового эксперимента, основанного на динамике дневных цен закрытия индекса за февраль — август 2007 г. (полугодовая торговая история).

Участниками эксперимента выступили 52 студента старших курсов экономических специальностей НИУ ВШЭ, имеющие навыки работы на финансовых рынках и прошедшие специализированные образовательные курсы. Для участников моделировалась ситуация принятия инвестиционных решений, близкая к той, с которой сталкиваются игроки на финансовых рынках. Группе предъявлялся временной ряд динамики дневных котировок индекса Доу — Джонса и соответствующий им график. После этого каждый из членов группы должен был зафиксировать свои субъективные ожидания путем выставления прогноза котировки на следующий торговый день. После фиксации прогнозов представлялась реальная котировка индекса и достраивался график для более наглядного представления данных. Далее участники выставляли свои субъективные прогнозы на следующий торговый день, и т. д. В совокупности было собрано 52 выборки субъективных прогнозов на 126 торговых дней.

После усреднения мы получили представительную выборку массовых субъективных ожиданий, соответствующих массовым ожиданиям участников финансовых рынков. У нас появилась возможность на основе полученной выборки эмпирически проверить ожидания игроков на предмет их рациональности и воздействия на них базовых поведенческих эффектов.

### ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА

#### Формализм распределения субъективных ожиданий

На следующем этапе исследования мы попытались сформировать математический аппарат для решения поставленных задач.

Вначале необходимо было оценить распределение полученных субъективных прогнозов. Опровержение гипотезы о нормальности в рамках данного исследования приводится не в полной мере. Мы лишь ограничимся ссылкой на ряд весьма авторитетных исследований (например, Д. Эша<sup>1</sup>, Д. Форда<sup>2</sup>, А. Шейха, Х. Цяо, Р. Галковски<sup>3</sup>), которые показывают, что в реальности распределение доходности весьма отличается от нормального. Поэтому для оценки распределения полученной выборки необходимо помимо первых моментов аналитически получить моменты более высоких порядков. Это позволит нам оценить, насколько асимметричны в своем распределении субъективные прогнозы участников финансовых рынков.

За основу мы взяли методологию разложения нормальной плотности вероятности в ряды Грама — Шарлье. Данное разложение позволяет аналитически записать функцию плотности вероятности неизвестного распределения, включающую моменты

<sup>1</sup> См.: Esch D. N. *Non-normality Facts and Facilities // The Journal of Investment Management*. — 2010. — Vol. 8.

<sup>2</sup> См.: Ford G. S. *Daily Stock Returns, Non-Normality and Hypothesis Testing / Applied Economic Studies (AES)* (<http://www.aestudies.com/library/daily.pdf>).

<sup>3</sup> См.: Sheikh A. Z., Qiao H., Galkowski R. *Non-normality of Market Returns: A Framework for Asset Allocation Decision Making // The Journal of Alternative Investments, CFA Digest*. — 2010.

порядка выше второго. Таким образом, мы аналитически получаем численную оценку параметров асимметрии и эксцесса распределения субъективных прогнозов.

Суть разложения в ряды Грама — Шарлье заключается в записи неизвестной характеристической функции распределения, плотность вероятности которой аппроксимируется относительно характеристических функций распределения с известными и подходящими свойствами и восстанавливается путем обратного разложения Фурье. Отталкиваясь от предложенного Э. Жондо и М. Рокингером формализма разложения в ряды Грама — Шарлье<sup>4</sup>, получаем следующую запись функции плотности вероятности неизвестного асимметричного распределения:

$$F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \left[1 + \frac{s}{3! \sigma^3} H_3\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{k}{4! \sigma^4} H_4\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right],$$

где  $s$  и  $k$  — параметры асимметрии и эксцесса;

$H_3(x) = x^3 - 3x$  и  $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  — полиномы Эрмита.

### Поведенческие эффекты механизма формирования массовых ожиданий

На следующем шаге мы формируем основную теоретическую базу исследования, отталкиваясь от фундаментальных работ Н. Барбериса, А. Шляйфера, Р. Вишни<sup>5</sup>. Эти исследователи описали модель формирования ожиданий инвесторами на основе двух базовых когнитивных эффектов — недостаточной (замедленной) и чрезмерной реакции.

Эффект недостаточной реакции наблюдается, когда участники финансовых рынков на относительно коротких временных интервалах (с точки зрения инвестирования) недостаточно полно учитывают поступающую информацию о финансовом активе. Иными словами, инвесторы игнорируют вновь поступающие рыночные сигналы, экстраполируя свои ожидания только на основе ранее полученных сигналов. Барберис с коллегами соотносили данный феномен с преобладанием консервативного подхода в механизме формирования ожиданий. Вследствие преобладания консерватизма<sup>6</sup> в последующие периоды возникает эффект дрейфа цены в том же направлении, что и в момент поступления информации<sup>7</sup>.

Эффект же чрезмерной реакции (репрезентативной эвристики, по Барберису) заключается в том, что инвесторы начинают игнорировать ранее полученные информационные сигналы, а свои ожидания формируют, мгновенно реагируя на вновь поступившие. Иными словами, вслед за периодом, в котором поступил

<sup>4</sup> См.: Jondeau E., Rockinger M. Estimating Gram-Charlier Expansions with Positivity Constraints // *Banque de France, NER* № 56. — 1999; Jondeau E., Rockinger M. Gram-Charlier Densities // *The Journal of Economic Dynamics and Control*. — 2001.

<sup>5</sup> См.: Barberis N., Shleifer A., Vishny R. A model of investor sentiment // *Journal of Financial Economics*. — 1998. — Vol. 49.

<sup>6</sup> Эффект консерватизма, по Н. Барберису, выражается в недостаточно быстром и своевременном изменении модели формирования ожиданий в ответ на вновь поступающие рыночные сигналы.

<sup>7</sup> Эффект дрейфа ценовых процессов подробно освещен Р. Майкли, Р. Талером, К. Вомаком и др. (см.: Michaely R., Thaler R., Womack K. Price reactions to dividend initiations and omissions: overreaction or drift? // *Journal of Finance*. — 1995. — Vol. 50; Michaely R., Womack K. Conflict of interest and the credibility of underwriter analyst recommendations // *Review of Financial Studies*. — 1999. — Vol. 12). В данном исследовании мы лишь ограничимся предпосылками Н. Барбериса и его соавторов относительно связи дрейфа цен и эффекта недостаточной реакции.

новый сигнал, наблюдается дрейф цены в сторону, противоположную направлению, индуцированному сигналом<sup>8</sup>.

Результаты, полученные Н. Барберисом и его соавторами, послужили фундаментом для исследования Р. Блумфельда и Д. Хэйлза<sup>9</sup>, в котором они эмпирически доказывают состоятельность оценки механизмов формирования массовых ожиданий участниками рынков на основе двух конкурирующих моделей. Первая модель предполагает консервативный подход (эффект недостаточной реакции), вторая отталкивается от эффекта репрезентативной эвристики (эффект чрезмерной реакции).

Таким образом, у нас есть основание оценивать распределение полученной ранее выборки субъективных прогнозов исходя из наличия у субъектов двух противоборствующих моделей в механизмах принятия решений. Мы предполагаем, что распределение субъективных ожиданий, выраженных в терминах доходности<sup>10</sup>, можно описать смесью из двух конкурирующих локальных распределений. Формализм каждого из них происходит из моделей, описанных Н. Барберисом, А. Шляйфером и др. При этом функция плотностей вероятностей каждого из локальных распределений включала третий и четвертый моменты и получалась аналитически в ходе разложения нормальной плотности в ряды Грама — Шарлье.

### **Обработка результатов полевых экспериментов с поправкой на подверженность влиянию базовых поведенческих эффектов**

Итак, в каждый момент времени в ходе принятия решений инвестор, анализируя значения доходности наблюдаемого ценового ряда, имеет дело фактически с несколькими явным образом не наблюдаемыми стохастическими генераторами этих значений — распределениями вероятностей. Эти распределения формируют наблюдаемый процесс с некоторыми весами, суммарно равными единице, которые можно истолковать, в свою очередь, как вероятности того, что наблюдаемый ценовой ряд порожден данным распределением. Тогда процесс переключения между двумя моделями формирования ожиданий, по Барберису, представляется в виде переключения между локальными распределениями, формирующими генеральную смесь.

Вышеописанная логика ставит перед нами задачу разделения смеси локальных распределений и оценки их моментов. Эта проблематика широко изучена<sup>11</sup>,

---

<sup>8</sup> См.: De Bondt W., Thaler R. Does the Stock Market Overreact? // *Journal of Finance*. — 1985. — Vol. 40. — P. 793–808.

<sup>9</sup> См.: Bloomfield R., Hales J. Predicting the next step of a random walk: experimental evidence of regime-shifting beliefs // *Journal of Financial Economics*. — 2002. — Vol. 65. — P. 397–414.

<sup>10</sup> В своей фундаментальной для поведенческих финансов работе Д. Канеман и А. Тверски описывают механизмы принятия решений так: субъект оперирует ожиданиями не будущих значений цены актива, а изменения его стоимостного выражения (см.: Kahneman D., Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk // *Econometrica*. — 1979. — Vol. 47). Вместе с тем один из основных психофизиологических законов восприятия — закон Вебера — Фехнера основан на постулате, что субъект логарифмически пропорционально реагирует на изменения входящего сигнала. Таким образом, в своей работе мы оперируем не временным рядом котировок, а рядом полученных логарифмических приростов, используя первый логарифм разности ценовых значений.

<sup>11</sup> См.: Choi K. Estimators for the parameters of a finite mixture of distributions // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. — 1969. — Vol. 21; Choi K., Bulgren W. G. An estimation procedure for mixtures of distributions // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 1968. — B30, № 3. — P. 444–460; Kabir A. B. M. Estimation of parameters of a finite mixture of distributions // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 1968. — B30, № 3; McLachlan G. J. The Classification and Mixture Maximum Likelihood Approaches to Cluster Analysis // *Handbook of Statistics*, vol. 2 / Eds., P. R. Krishnaiah and L. N. Kanal. — Amsterdam: North-Holland, 1982. — P. 199–208; McLachlan G. J., Basford K. E. *Mixture Models: Inference and Application to Clustering*. — New York: Marcel Dekker, 1988; McLachlan G. J., Peel D. *Finite Mixture Models*. — New York: Wiley, 2000; Chen H. Testing for a finite mixture model with two components // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 2004. — B66, Part 1. — P. 95–115.

и мы лишь укажем, что основное условие разделения — идентифицируемость смеси<sup>12</sup>. В нашей работе предполагается, что рассматриваемые смеси идентифицируемы.

Современный статистический инструментарий предлагает широкий набор методов разделения смеси и нахождения параметров локальных распределений и их весов в ней. Мы применяли процедуру максимизации функции правдоподобия<sup>13</sup>.

Применяя ранее упомянутое разложение в ряды Грама — Шарлье, запишем логарифм функции правдоподобия:

$$f(w, \mu, \sigma, s, k, U) = \sum_{n=1}^N \ln \sum_{j=1}^z \frac{w_j}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp \left[ -\frac{(U_n - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] \left[ 1 + \frac{s_j}{3! \sigma_j^3} H_3 \left( \frac{U_n - \mu_j}{\sigma_j} \right) + \frac{k_j}{4! \sigma_j^4} H_4 \left( \frac{U_n - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right],$$

где  $(w_1, \dots, w_z)$  — вектор  $z$  неотрицательных весов локальных распределений,  $\sum w = 1$ ;  $(\mu_1, \dots, \mu_z)$  и  $(\sigma_1, \dots, \sigma_z)$ ,  $\sigma > 0$  — векторы  $z$  математических ожиданий и  $z$  стандартных отклонений  $z$  локальных распределений соответственно;

$(s_1, \dots, s_z)$  и  $(k_1, \dots, k_z)$  — векторы  $z$  параметров скоса и эксцесса.

Переменная  $U$  формирует вектор наблюдаемого процесса, где  $U_n$  — сигнал, наблюдаемый в момент  $n$  ( $n = 1 \dots N$  — длина ряда, на котором происходит оценка распределения).

Следует отметить, что параметрический метод разложения в ряды Грама — Шарлье имеет ряд несовершенств. Так, исходя из используемого формализма, вновь получаемая параметрическая запись функции плотности вероятности будет корректной только тогда, когда площадь под кривой распределения будет находиться лишь в положительной области определения. Это порождает дилемму. С одной стороны, для получения качественной оценки распределения нам достаточно только первых четырех моментов. С другой — столь малое число слагаемых в ряде не позволяет напрямую оценивать плотность только на положительной области определения.

Решение полученной дилеммы вытекает из ряда эмпирических исследований<sup>14</sup>, позволяющих найти справедливые ограничения, при которых получаемая по Граму — Шарлье плотность будет находиться лишь в положительной области определения.

<sup>12</sup> См.: Teicher H. On the mixture of distributions // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1960. — Vol. 31, № 1. — P. 55–73; Teicher H. Identifiability of mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1961. — Vol. 32, № 1. — P. 244–248; Teicher H. Identifiability of finite mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1963. — Vol. 34, № 4. — P. 1265–1269; Teicher H. Identifiability of mixtures of product measures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1967. — Vol. 38, № 4. — P. 1300–1302.

<sup>13</sup> Этот метод подробно описан в экономической литературе (см.: John S. On identifying the population of origin of each observation in a mixture of observations from two normal populations // *Technometrics*. — 1970. — Vol. 12, № 3. — P. 553–563; Scott A. J., Symons M. J. Clustering methods based on likelihood ratio criteria // *Biometrics*. — 1971. — Vol. 27, № 2. — P. 387–397; Dick N. P., Bowden D. C. Maximum likelihood estimation for mixtures of two normal distributions // *Biometrics*. — 1973. — Vol. 29, № 4. — P. 781–790) и не нуждается в отдельном разъяснении.

<sup>14</sup> См.: Barton D. E., Dennis K. E. The Conditions Under Which Gram-Charlier and Edgeworth Curves are Positive Definite and Unimodal // *Biometrika*. — 1952. — Vol. 39; Perote J., de Brio E. Positive Definiteness of Multivariate Densities Based on Hermite Polynomials // *Journal of International Advances in Economic Research*. — 2006. — Vol. 12.

Э. Жондо и М. Рокингер<sup>15</sup> эмпирически получили области определения параметров асимметрии и эксцесса, на которых для всей области определения входного сигнала площадь под кривой находится лишь в положительной области. Численным методом и при помощи аналитической геометрии авторы сначала анализировали область определения самой случайной величины, подбирая значения пары параметров асимметрии и эксцесса так, чтобы площадь под кривой не заходила в отрицательную зону. Затем были найдены границы отрезков на числовой оси для параметров асимметрии и эксцесса, в рамках которых площадь под кривой распределения не заходит в отрицательную зону для всей области определения случайной величины. В результате плотность определяется только в положительной области при ограничении четвертого момента в отрезок от 0 до 4.

Наложив соответствующие ограничения, мы максимизируем функцию правдоподобия и находим веса и моменты локальных распределений. Получаем

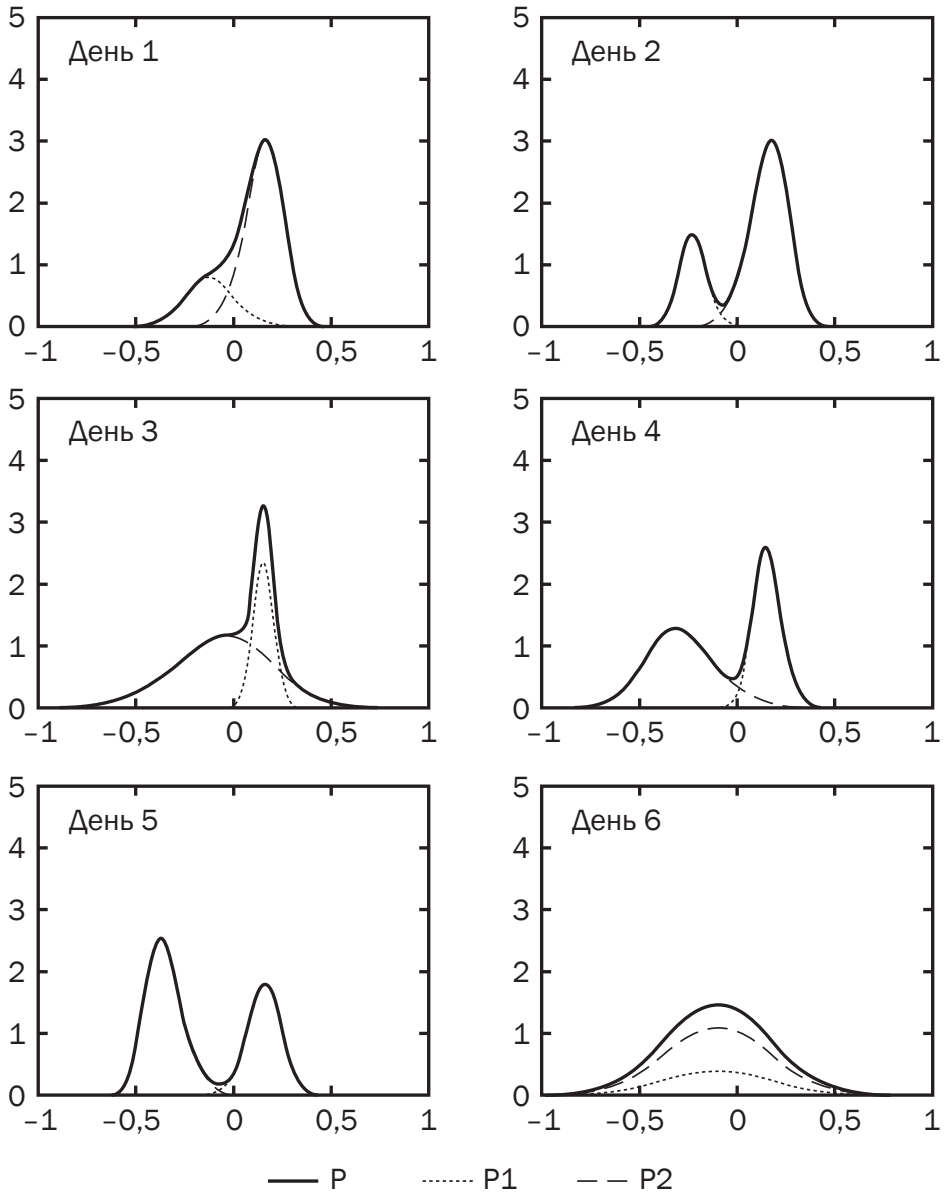
$$\begin{bmatrix} w(w_1, \dots, w_z) \\ \mu(\mu_1, \dots, \mu_z) \\ \sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_z) \\ s(s_1, \dots, s_z) \\ k(k_1, \dots, k_z) \end{bmatrix} = \arg \max_{w, \mu, \sigma, s, k} \sum_{n=1}^N \ln \sum_{j=1}^z \frac{w_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j}} \exp \left[ -\frac{(U_n - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] \left[ 1 + \frac{s_j}{3!\sigma_j^3} H_3 \left( \frac{U_n - \mu_j}{\sigma_j} \right) + \frac{k_j}{4!\sigma_j^4} H_4 \left( \frac{U_n - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right].$$

Напомним, что данный математический аппарат необходим нам для оценки распределения субъективных прогнозов участников рынка, полученных нами в ходе полевых экспериментов. Поэтому входной ряд будет представлять собой вектор значений доходности, реконструированных по субъективным прогнозам участников эксперимента. Длина входящего вектора подбиралась нами эмпирически в зависимости от получаемых результатов. Наиболее показательными получились интервалы длиной 12 и 17 точек доходности<sup>16</sup>. Это дало нам возможность оценить эволюцию распределения субъективных прогнозов на всем полученном ряде прогнозов путем сдвига скользящего окна в 12 или 17 точек вдоль оси времени и получения параметров локальных распределений на каждом шаге.

<sup>15</sup> См.: Jondeau E., Rockinger M. *Estimating Gram-Charlier Expansions with Positivity Constraints* // *Banque de France, NER* № 56. — 1999.

<sup>16</sup> Здесь необходимо сделать следующую оговорку. Предложенный математический аппарат включает в себя восемь параметров распределения (по четыре на каждое из двух локальных), подлежащих переоценке при сдвиге скользящего окна вдоль числовой оси. Статистическая наука воспримет как спорные оценки параметров, полученных при помощи скользящего окна в 12 и 17 наблюдений. Для чистой статистики такое малое количество точек не должно позволять достоверно оценивать распределение. Тем не менее в данной работе мы имеем дело с распределением субъективных прогнозов. В соответствии с теорией Ф. Рамсея и Б. Финетти, субъективные прогнозы будущей динамики доходности получаются в условиях неопределенности и объясняются не чем иным, как субъективным доверием к оценке наблюдаемой картины мира, не вполне надежной статистически. Современная поведенческая наука весьма четко выделяет субъективную важность предыдущей истории для экстраполяции субъективных ожиданий. Таким образом, полученные нами эмпирически длины скользящего окна в 12 и 17 точек доходности (за 12 и 17 торговых дней соответственно) — оптимальный временной интервал, на котором участники эксперимента давали свою субъективную оценку ценовому ряду.

Эволюция распределения субъективных прогнозов, полученных в результате эксперимента



Примечание: рисунки соответствуют прогнозам последовательно на шесть торговых дней.  
 Источник: составлено автором.

На рис. 1 наглядно представлена эволюция распределения субъективных прогнозов доходности промышленного индекса Доу — Джонса за несколько торговых дней февраля 2007 г., оцененная на скользящем окне в 12 точек входного сигнала. Линией P выводится вид распределения смеси, а P1 и P2 — локальные распределения, формирующие данную смесь.



**Параметры локальных распределений,  
соответствующие эволюции распределения субъективных прогнозов**

	1	2	3	4	5	6
$w_1$	0.25721	0.2592	0.38419	0.31093	0.27803	0.28743
$w_2$	0.74279	0.74086	0.61581	0.68907	0.72197	0.71257
$\mu_1$	-0.01992	-0.11007	0.17127	0.18589	0.17801	0.19286
$\mu_2$	0.09647	0.10256	-0.06566	-0.06682	-0.12823	-0.17626
$\sigma_1$	0.15659	0.15096	0.10306	0.09428	0.08652	0.08327
$\sigma_2$	0.12373	0.12857	0.19142	0.20487	0.2439	0.22513
$s_1$	-0.04904	-0.05135	-0.48371	-0.32579	-0.17133	-0.30965
$s_2$	0.01411	-0.27151	-0.93161	-0.99786	-8.0871	0.13921
$k_1$	0.0001	0.00009	0.0001	0.00009	0.00009	0.0001
$k_2$	0.00003	0.00008	0.0001	0.00009	0.00009	0.0001

Источник: составлено автором.

В табл. 1 представлены параметры локальных распределений для шести последовательных сдвигов скользящего окна в 12 точек субъективно ожидаемой доходности и выведенных графически на рис. 1 ( $w_1$  и  $w_2$  — параметры весов локальных распределений;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — параметры матожиданий;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — параметры дисперсий;  $s_1$  и  $s_2$  — параметры асимметрии;  $k_1$  и  $k_2$  — параметры эксцесса).

Найдя параметры локальных (асимметричных) распределений, получаем параметрическую оценку плотности распределения самих субъективных прогнозов. Теперь мы можем исследовать выборку субъективных прогнозов на предмет выявления механизмов формирования ожиданий и влияния на них базовых когнитивных эффектов.

Классические финансовые теории предполагают, что в условиях, близких к информационной эффективности рынка, игроки формируют свои ожидания рационально. Математический формализм эффективного рынка подразумевает применение нормальных (гауссовских) плотностей вероятности для оценки распределения ряда доходностей. В таком случае матожидание распределения наиболее полным образом передает характер наблюдаемого процесса.

Однако, как показал Е. В. Ильин, сотрудник кафедры международных валютно-финансовых отношений НИУ ВШЭ<sup>17</sup>, субъекты на рынке заинтересованы в умеренном отклонении стохастического процесса значений доходности от нормального распределения. Причем сами отклонения носят строго систематический характер. Таким образом, ставится под сомнение справедливость традиционного использования нормальных распределений и их матожидания в качестве параметра, дающего наиболее полную информацию о характере процесса.

Попробуем найти объяснение данному феномену с точки зрения поведенческих финансовых теорий. Эти теории в вопросе рациональности ожиданий участников рынка отталкиваются от того факта, что ожидания систематически отклоняются от рациональности в силу конкретных поведенческих эффектов.

С одной стороны, мы выделяем эффект ограниченной рациональности, описанный Г. Саймоном<sup>18</sup>. Это феномен в процессе принятия решений, при котором рациональность

<sup>17</sup> См.: Ильин Е. В. Конфликт интересов в саморегулируемых организациях США и неэффективность финансового рынка // Экономический журнал ВШЭ. — 2012. — № 2.

<sup>18</sup> См.: Simon H. A Behavioral Model of Rational Choice, in *Models of Man, Social and Rational: Mathematical Essays on Rational Human Behavior in a Social Setting*. — New York: Wiley, 1957.



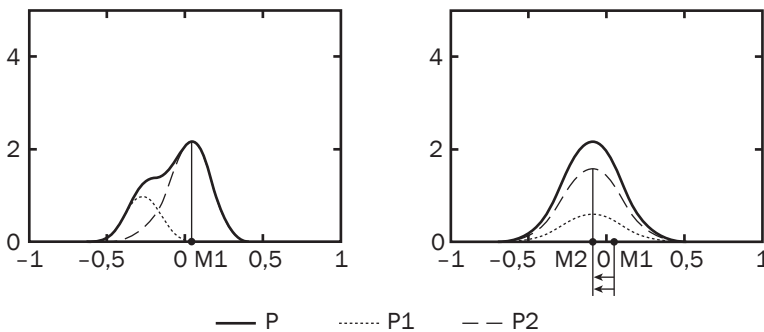
субъекта ограничена имеющейся у него информацией, когнитивными эффектами и временем, в течение которого принимаются сами решения. Математически данный эффект может, в частности, выражаться в сужении вероятностного интервала до 70–80 % путем отсеечения хвостов распределений.

С другой стороны, мы связываем систематическое отклонение от нормального распределения с эффектом «узкой рамки» (narrow framing effect), описанным Д. Канеманом<sup>19</sup>. По Канеману, этот эффект в процессе формирования ожиданий выражается в том, что субъект принимает решения на основе не объективного процесса, а своих субъективных ожиданий относительно будущих приростов. Таким образом, эффект «узкой рамки» также объясняет систематическое отклонение от нормального распределения. Математически субъективные ожидания игроков могут не совпадать с матожиданием распределения ценового процесса, а соответствовать модам и сдвигаться ближе к хвостам в случае асимметричности распределения.

В работе мы предполагаем, что именно моды асимметричных распределений субъективных прогнозов на рынках несут в себе наиболее полную информацию о характере наблюдаемых ценовых процессов. В случае же, когда механизм формирования ожиданий представлен двумя конкурирующими моделями (эффекты недостаточной и чрезмерной реакции), мы предполагаем, что мода главного распределения в смеси определяет характер ценового процесса.

Рисунок 2

**Предугадывание будущей нисходящей динамики доходности субъектами рынка**



Источник: рассчитано автором.

Эволюция распределения субъективных прогнозов на рис. 2 соответствует понижающей динамике объективного рыночного процесса. Так, в момент времени, соответствующий правому распределению, индекс Доу – Джонса снизился относительно предыдущего дня, которому соответствует левая кривая распределения. Напомним, что, исходя из условия проведенного эксперимента, правая кривая распределения соответствует прогнозам субъектов, сформированным в предыдущий момент времени. Иными словами, формируя свои ожидания, участники эксперимента не знали, что индекс снизится в следующий период. Тем не менее их субъективные ожидания, формализованные в предложенной выше логике, сбылись.

На рис. 2 это представлено сдвигом субъективно ожидаемой доходности из точки M1, соответствующей моде старшего распределения, которое построено на выборке

<sup>19</sup> См.: Kahneman D. *Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics* // *American Economic Review*. – 2003. – Vol. 93; Barberis N., Ming H. *The Loss Aversion/Narrow Framing Approach to the Equity Premium Puzzle* // *Handbook of Investments: Equity Premium*. – 2005.

субъективных прогнозов на предыдущем шаге, в отрицательную область к точке M2, соответствующей старшей моде распределения субъективно ожидаемой доходности в следующий период. Таким образом, мы получаем эмпирическое подтверждение справедливости представленной гипотезы и работоспособности математического аппарата, предложенного для ее проверки.

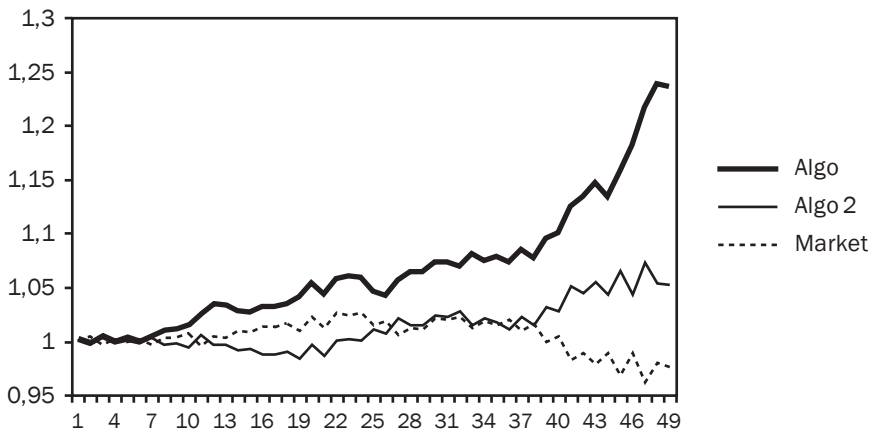
Попробуем доказать нашу гипотезу эмпирически, моделируя виртуальную ретроспективную инвестиционную стратегию. Проверим, основан ли процесс принятия инвестиционных решений на изменении субъективных ожиданий, которое выражается в сдвиге субъективно ожидаемой доходности, соответствующей моде распределения (старшей моде в бимодальном случае), левее или правее относительно субъективной доходности (моды) на предыдущем шаге.

Всего за рассматриваемый период в 126 торговых дней, который предъявлялся участникам эксперимента, наблюдалось 49 смен знака доходности. Мы проверили, насколько предложенный формализм механизма принятия решений способен предугадать эти 49 точек смены тренда. В результате мы получили, что 31 из 49 (63,3 %) изменений знака было предсказано смещением значения субъективно ожидаемой доходности (а точнее, соответствующей моды старшего распределения в смеси) влево или вправо относительно значения субъективно ожидаемой доходности на предыдущем шаге. Логика моделирования была такова: в случае смещения моды субъективно ожидаемой доходности вправо мы предполагали, что обобщенный (агрегированный) субъект ожидает положительную динамику ценового процесса, и брали рыночную доходность со знаком плюс; в случае смещения моды субъективного распределения значений доходности влево мы, наоборот, брали рыночную доходность со знаком минус. Тем самым мы моделируем, соответственно, либо длинную, либо короткую торговую позицию.

Для сравнения ту же логику формирования ретроспективной стратегии принятия решений мы использовали на основе классического подхода с применением матожидания процесса. В ситуации, когда матожидание распределения на предшествовавшем шаге было положительным, мы моделировали длинную позицию. Когда же матожидание было отрицательным, мы моделировали короткую позицию. В результате из 49 изменений знака таким образом было предсказано лишь 22 изменения (44,9 %).

Рисунок 3

**Результативность виртуальных ретроспективных инвестиционных стратегий (инвестиционные решения основывались на оценке распределения субъективных ожиданий на скользящем окне в 12 точек)**



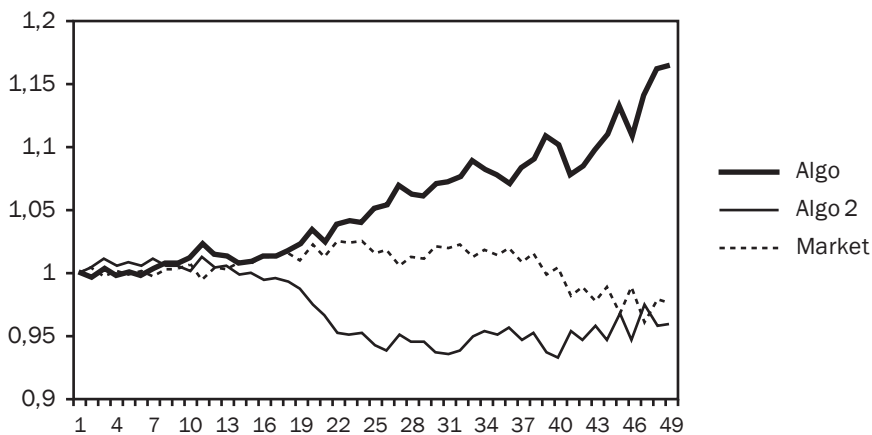
Источник: рассчитано автором.

На рис. 3 выводятся три кривые, наглядно демонстрирующие справедливость предложенной логики. Кривой Market передается рост портфеля, основанного на объективной рыночной доходности, которая соответствует 49 точкам смены динамики индекса Доу – Джонса за рассматриваемый период. Кривой Algo 2 передается инвестиционная стратегия, основанная на оценке знака матожидания скользящего окна из точек субъективно ожидаемой доходности на предыдущем шаге. Напомним, что основанный на оценке знака матожидания процесса математический аппарат предугадал лишь 44,9 % объективно наблюдаемых перемен знака (22 из 49 точек). Кривая Algo соответствует инвестиционной стратегии, основанной на оценке изменений субъективно ожидаемых доходностей по сдвигам мод старших распределений в смеси.

Последняя оценка строилась на сравнении значений мод старших распределений в смеси на текущем и предыдущем шаге. Как мы можем видеть, торговая стратегия, основанная на предложенном формализме механизма формирования ожиданий, предугадала 63,3 % (31 из 49 точек) будущих смен знака и довольно серьезно превысила рыночную доходность за рассматриваемый период.

Рисунок 4

**Результативность виртуальных ретроспективных инвестиционных стратегий (инвестиционные решения основывались на оценке распределения субъективных ожиданий на скользящем окне в 17 точек)**



Источник: рассчитано автором.

На рис. 4 представлены результирующие кривые для скользящего окна в 17 точек доходностей. Предложенный математический аппарат предугадал 61,2 % (30 из 49 точек) смены знака, что существенно превышает рыночную доходность. Формализм, основанный на оценке знака матожидания на предыдущем шаге, предугадал лишь 42,9 % (21 из 49 точек).

Следует сделать отдельную оговорку о статистической значимости полученных результатов. На столь малом количестве наблюдений (49 точек смены знака) погрешность среднего при принадлежности процесса случайному распределению составляет порядка 10 %. Иными словами, диапазон в 40–60 % угадывания, согласно статистической науке, вполне может быть объяснен случайным распределением. Тем не менее полученные нами результаты в 63,3 и 61,2 % превышают предельный порог и выходят за границы случайности.

## ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ДОСТОВЕРНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Достигнутый результат в 63,3 % угадывания эмпирически подтверждает справедливость нашей гипотезы: мода старшего локального распределения, полученная в результате параметризации асимметричного распределения субъективных ожиданий, несет в себе больше информации о характере ожидаемой динамики ценового процесса. Это также доказывает справедливость описанных выше когнитивных эффектов, на основе которых мы строили свой формализм.

Мы выяснили, что в процессе принятия инвестиционных решений рыночный субъект неявным для него образом формирует свои ожидания на основании преобладания одного из двух когнитивных эффектов — чрезмерной или недостаточной реакции, описанных Н. Барберисом и его коллегами. Также, в силу влияния эффектов ограниченной рациональности и «узкой рамки», субъект не оперирует всеми возможными исходами, а фокусируется на субъективно более важных и ожидаемых исходах. В нашей модели субъективно более вероятные ожидания соответствуют моде старшего локального асимметричного распределения в смеси. Справедливость данной логики подтверждается эмпирически.

Теперь проверим, обладают ли изменения субъективных ожидаемых доходностей (выраженные в виде сдвига значения моды распределения влево или вправо относительно значения моды предыдущего шага) предсказательной силой в отношении доходности объективного процесса и насколько такое объяснение состоятельно.

Проверка проводилась на основе широко известного эконометрического метода выявления причинности — теста Грейнджера<sup>20</sup>. Его формализм подразумевает сопоставление двух регрессионных уравнений — авторегрессии зависимого процесса и уравнения регрессии, где зависимый процесс объясняется не только авторегрессионным уравнением, но и добавлением в регрессионное уравнение независимого (объясняющего) процесса. Тогда независимый процесс  $X$  считается причинным для зависимого процесса  $Y$ , если его добавление в уравнение регрессии объясняет динамику зависимого процесса лучше, чем простое уравнение авторегрессии. Иными словами, процесс  $X$  считается причинным, если он повышает точность регрессионного прогноза  $Y$  относительно прогноза только по собственным предыдущим значениям  $Y$ .

Проверим, повышает ли в нашем случае добавление в уравнение регрессии значений разности субъективных доходностей на текущем и предыдущем шаге (соответствующих им мод старших распределений в смеси) точность прогноза объективной рыночной динамики. В табл. 2 мы приводим результаты теста Грейнджера по выявлению причинности.

Таблица 2

Параметры по тесту Грейнджера

Lag	F statistics	p-value
2	6.273	0.004
3	3.913	0.015
4	3.267	0.021
5	2.245	0.07
6	1.391	0.246

Источник: рассчитано автором.

<sup>20</sup> См.: Granger C. J. *Investigating Causal Relationships by Econometrics Models and Cross Spectral Methods // Econometrica*. — 1969. — Vol. 37. — P. 425–435.

Полученные значения F-статистики и величины p-value в зависимости от количества используемых в уравнении регрессии лагов отвергают нулевую гипотезу об отсутствии причинной взаимосвязи между объективной рыночной динамикой и полученными в результате эксперимента субъективными ожиданиями. Результаты наглядно подтверждают способность субъективных ожиданий доходности, формализованных в предлагаемой нами математической логике, спрогнозировать динамику объективных рыночных доходностей. Как мы можем видеть, использование лагов в 3–4 шага вполне вписывается в 95%-й доверительный интервал, что говорит о высокой точности модели.

В представленном исследовании мы описали массовый полевой эксперимент, направленный на изучение влияния поведенческих эффектов на механизмы формирования субъективных ожиданий участниками рынка. В ходе эксперимента мы получили представительную выборку субъективных прогнозов дневных котировок индекса Доу — Джонса. Нами был предложен математический аппарат на основе разложения в ряды Грама — Шарлье, способный параметрически оценить асимметричность распределения ряда ожидаемых доходностей с учетом влияния базовых поведенческих эффектов. Мы попытались облечь в математическую форму такие поведенческие эффекты, как чрезмерная и недостаточная реакция, ограниченная рациональность и эффект «узкой рамки».

Предложенный математический формализм позволил нам выдвинуть и подтвердить эмпирически гипотезу о том, что в силу асимметричности распределения и базовых поведенческих эффектов моды субъективных прогнозов на рынках несут в себе наиболее полную информацию о характере наблюдаемых ценовых процессов. Иными словами, мы подтвердили, что распределение субъективных прогнозов не является асимптотически нормальным и способно объяснить существенные черты объективного ценового процесса ограниченным числом имманентных человеческой психике субъективных.

В работе показано, что рациональность субъективных ожиданий не ведет закономерно к информационной эффективности финансовых рынков. Коль скоро прогнозы сбываются, то они, по формальному определению рациональности, рациональны. Тем не менее рациональность субъективных прогнозов порождает такой ценовой процесс, распределение которого отличается от информационной эффективности (от нормальности). Предложенный нами математический аппарат позволяет формализовать эту особенность принятия инвестиционных решений с учетом базовых когнитивных эффектов.

## **Библиография**

1. Ильин, Е. В. Конфликт интересов в саморегулируемых организациях США и неэффективность финансового рынка // Экономический журнал ВШЭ. — 2012. — № 2.
2. McLachlan, G. J., Basford, K. E. *Mixture Models: Inference and Application to Clustering*. — New York: Marcel Dekker, 1988.
3. McLachlan, G. J., Peel, D. *Finite Mixture Models*. — New York: Wiley, 2000.
4. Simon, H. A Behavioral Model of Rational Choice, in *Models of Man, Social and Rational: Mathematical Essays on Rational Human Behavior in a Social Setting*. — New York: Wiley, 1957.
5. Abel, A. B., Mishkin, F. S. An Integrated View of Tests of Rationality, Market Efficiency, and the Short-Run Neutrality of Monetary Policy // NBER Working Papers No. 726. — 1983.
6. Barberis, N., Ming, H. The Loss Aversion/Narrow Framing Approach to the Equity Premium Puzzle // *Handbook of Investments: Equity Premium*. — 2005.
7. Barberis, N., Shleifer, A., Vishny, R. A model of investor sentiment // *Journal of Financial Economics*. — 1998. — Vol. 49.
8. Barton, D. E., Dennis, K. E. The Conditions Under Which Gram-Charlier and Edgeworth Curves are Positive Definite and Unimodal // *Biometrika*. — 1952. — Vol. 39.

9. Bloomfield, R., Hales, J. Predicting the next step of a random walk: experimental evidence of regime-shifting beliefs // *Journal of Financial Economics*. — 2002. — Vol. 65. — P. 397–414.
10. Boes, D. C. On the estimation of mixing distributions // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1966. — Vol. 37, № 1. — P. 177–188.
11. Chen, H. Testing for a finite mixture model with two components // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 2004. — B66, Part 1. — P. 95–115.
12. Choi, K. Estimators for the parameters of a finite mixture of distributions // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. — 1969. — Vol. 21.
13. Choi, K., Bulgren, W. G. An estimation procedure for mixtures of distributions // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 1968. — B30, № 3. — P. 444–460.
14. De Bondt, W., Thaler, R. Does the Stock Market Overreact? // *Journal of Finance*. — 1985. — Vol. 40. — P. 793–808.
15. Dick, N. P., Bowden, D. C. Maximum likelihood estimation for mixtures of two normal distributions // *Biometrics*. — 1973. — Vol. 29, № 4. — P. 781–790.
16. Esch, D. N. Non-normality Facts and Facilities // *The Journal of Investment Management*. — 2010. — Vol. 8.
17. Ford, G. S. Daily Stock Returns, Non-Normality and Hypothesis Testing [Электронный ресурс] / *Applied Economic Studies (AES)*. — Режим доступа: <http://www.aestudies.com/library/daily.pdf>.
18. Granger, C. J. Investigating Causal Relationships by Econometrics Models and Cross Spectral Methods // *Econometrica*. — 1969. — Vol. 37. — P. 425–435.
19. John, S. On identifying the population of origin of each observation in a mixture of observations from two normal populations // *Technometrics*. — 1970. — Vol. 12, № 3. — P. 553–563.
20. Jondeau, E., Rockinger, M. Estimating Gram-Charlier Expansions with Positivity Constraints // *Banque de France, NER № 56*. — 1999.
21. Jondeau, E., Rockinger, M. Gram-Charlier Densities // *The Journal of Economic Dynamics and Control*. — 2001.
22. Kabir, A. B. M. Estimation of parameters of a finite mixture of distributions // *Journal of the Royal Statistical Society*. — 1968. — B30, № 3.
23. Kahneman, D. Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics // *American Economic Review*. — 2003. — Vol. 93.
24. Kahneman, D., Tversky, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk // *Econometrica*. — 1979. — Vol. 47.
25. McLachlan, G. J. The Classification and Mixture Maximum Likelihood Approaches to Cluster Analysis // *Handbook of Statistics, vol. 2 / Eds., P. R. Krishnaiah and L. N. Kanal*. — Amsterdam: North-Holland, 1982. — P. 199–208.
26. Michaely, R., Thaler, R., Womack, K. Price reactions to dividend initiations and omissions: overreaction or drift? // *Journal of Finance*. — 1995. — Vol. 50.
27. Michaely, R., Womack, K. Conflict of interest and the credibility of underwriter analyst recommendations // *Review of Financial Studies*. — 1999. — Vol. 12.
28. Perote, J., de Brio, E. Positive Definiteness of Multivariate Densities Based on Hermite Polynomials // *Journal of International Advances in Economic Research*. — 2006. — Vol. 12.
29. Ramsey, F. On Problem in Formal Logic // *Proceedings of The London Mathematical Society*. — 1929. — Vol. 30.
30. Scott, A. J., Symons, M. J. Clustering methods based on likelihood ratio criteria // *Biometrics*. — 1971. — Vol. 27, № 2. — P. 387–397.
31. Sheikh, A. Z., Qiao, H., Galkowski, R. Non-normality of Market Returns: A Framework for Asset Allocation Decision Making // *The Journal of Alternative Investments, CFA Digest*. — 2010.
32. Sims, C. Money, Income and Causality // *American Economic Review*. — 1972. — Vol. 62. — P. 540–552.
33. Teicher, H. Identifiability of finite mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1963. — Vol. 34, № 4. — P. 1265–1269.
34. Teicher, H. Identifiability of mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1961. — Vol. 32, № 1. — P. 244–248.
35. Teicher, H. Identifiability of mixtures of product measures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1967. — Vol. 38, № 4. — P. 1300–1302.
36. Teicher, H. On the mixture of distributions // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1960. — Vol. 31, № 1. — P. 55–73.
37. Tversky, A., Kahneman, D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty // *Journal of Risk and Uncertainty*. — 1992. — Vol. 5.
38. Yakowitz, S. J. A consistent estimator for the identification of finite mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1969. — Vol. 40. — № 5. — P. 1728–1735.
39. Yakowitz, S. J., Spragins, J. D. On the identifiability of finite mixtures // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1968. — Vol. 39, № 1. — P. 209–214.